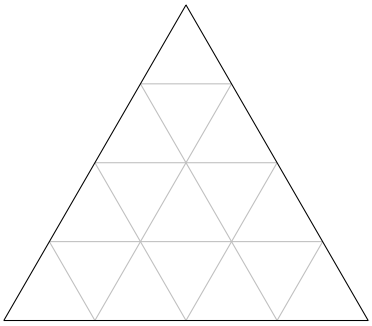
Quanti triangoli?

Riccardo Dossena

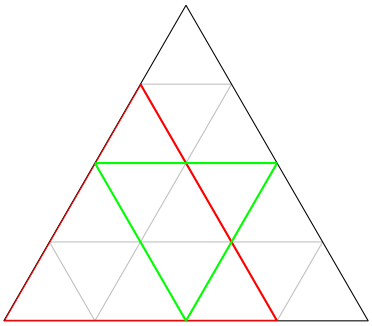
Estate 2012

Problema

Quanti triangoli equilateri sono presenti in questa figura?



Nota: vanno contati anche i triangoli del tipo evidenziato sotto (incluso il triangolo grande).



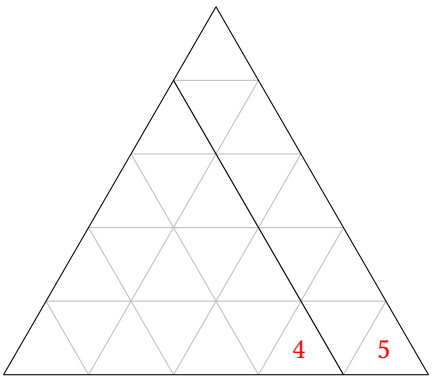
Soluzione

Un attento conteggio ci porta alla risposta (esatta) 27 triangoli. Ma noi siamo matematici, e la nostra curiosità ci spinge a ricercare una formula che fornisca automaticamente il numero dei triangoli a partire, ad esempio, dal numero n di triangolini con il vertice in alto che compongono la base (in questo caso $n = 4$). Vorremmo scrivere cioè l'espressione di una funzione $P(n)$[1]. L'idea è quella di procedere in modo ricorsivo, ovvero vedere quanti triangoli si aggiungono nel passaggio da $P(n-1)$ a $P(n)$, così da ottenere qualcosa del genere

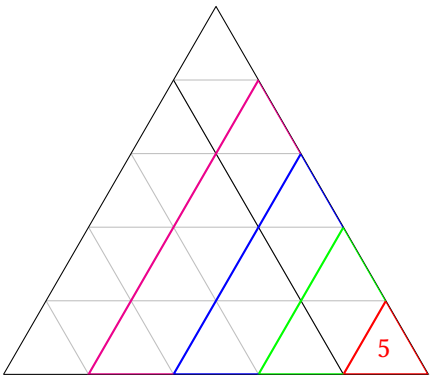
$$P(n) = P(n-1) + \text{triangoli che si aggiungono passando da } n-1 \text{ a } n. \tag{1}$$

Analizziamo qualche caso concreto, per andare a caccia di qualche regolarità. Supponiamo ad esempio di conoscere $P(4)$ e passiamo a $P(5)$, aggiungendo alla base formata da 4 triangolini il quinto (quello contrassegnato dal numero 5 in figura), e di conseguenza tutti gli altri necessari a comporre il triangolo equilatero completo.

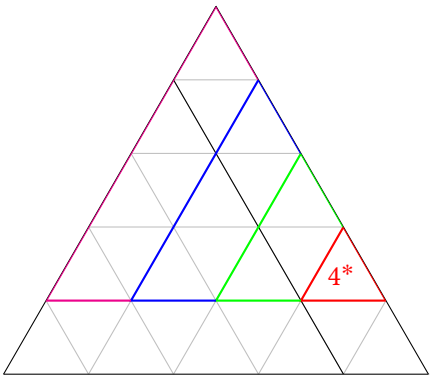
[1] Questo problema è stato affrontato e risolto in vari modi (si veda http://www.math.ku.dk/~mel/mel.pdf). Quello che voglio fare in questa sede è solo portare il mio personale contributo.



Concentriamoci ora sul triangolino 5 e contiamo quanti sono i nuovi triangoli dritti che lo contengono, come indicato di seguito.



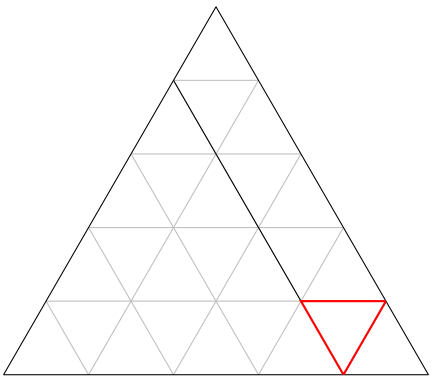
Sono esattamente 5, contando sia il triangolino stesso che il triangolo grande. Ora "saliamo" di un gradino e procediamo analogamente, conteggiando i triangoli dritti che contengono il triangolino contrassegnato con 4*.



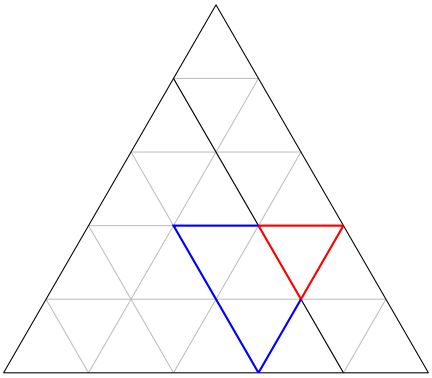
Sono 4, cioè uno in meno rispetto a prima. Salendo ancora ne troviamo altri 3, poi altri 2, poi l'ultimo triangolino in alto. Il procedimento si generalizza facilmente ed è chiaro che, passando da $P(n-1)$ a $P(n)$, il numero complessivo di triangoli dritti che si aggiungono (che denotiamo con $T_{\text{up}}(n)$) è esattamente

$$T_{\text{up}}(n) = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

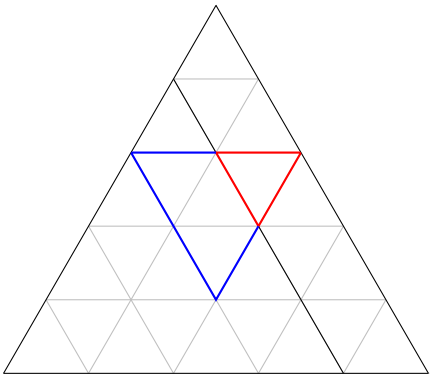
Ci rimane da stabilire quanti sono i triangoli capovolti che si aggiungono. Indichiamo il loro numero con $T_{\text{down}}(n)$. Il procedimento è meno immediato di prima, ma non difficile. Partiamo dal triangolino capovolto aggiunto più in basso, e notiamo subito che non ci sono altri triangoli capovolti che lo contengono.



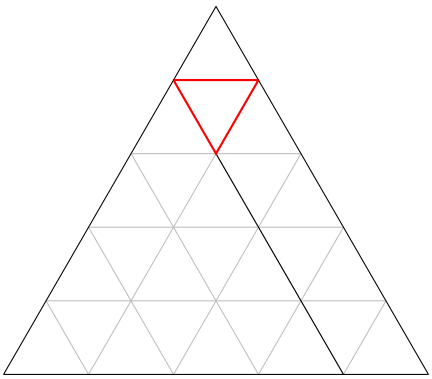
Saliamo e aggiungiamo altri 2 triangoli capovolti.



Saliamo ancora e ne troviamo altri 2

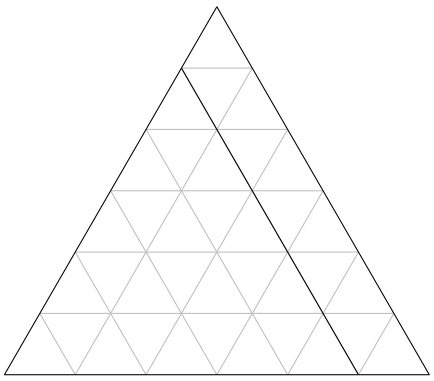


e poi l'ultimo

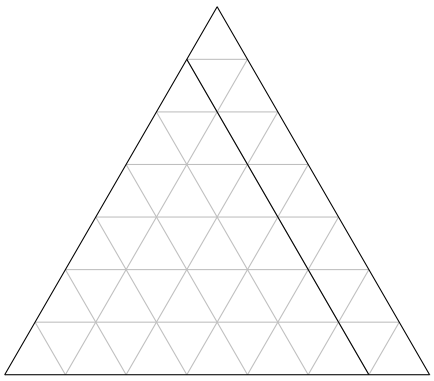


in tutto $1 + 2 + 2 + 1 = 6$. Ripetendo lo stesso procedimento per i triangoli con $n = 6$ ed $n = 7$, otteniamo

$$T_{\text{down}}(6) = 1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 \qquad \text{e} \qquad T_{\text{down}}(7) = 1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1 = 12.$$



$n = 6$



$n = 7$

È facile rendersi conto che la successione $T_{\text{down}}(n)$ segue uno schema regolare, che è riportato nella tabella sottostante[2].

n	Schema	$T_{\text{down}}(n)$
1		0
2	1	1
3	$1+1$	2
4	$1+2+1$	4
5	$1+2+2+1$	6
6	$1+2+3+2+1$	9
7	$1+2+3+3+2+1$	12
8	$1+2+3+4+3+2+1$	16

Si tratta ora di trovare un'espressione esplicita per $T_{\text{down}}(n)$, ma ciò dovrebbe essere fattibile, se ci lasciamo guidare dallo schema nella tabella. Conviene distinguere il caso n pari dal caso n dispari (poi unificheremo). Se n è pari si ha

$$\begin{aligned} T_{\text{down}}(n) &= 1+2+\ldots+\left(\frac{n}{2}-1\right)+\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}-1\right)+\ldots+2+1 \\ &= 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} i+\frac{n}{2} = 2\cdot\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}+\frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}+\frac{n}{2} = \frac{n^2}{4} \end{aligned}$$

se n è dispari si ha invece

$$\begin{aligned} T_{\text{down}}(n) &= 1+2+\ldots+\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}+\ldots+2+1 \\ &= 2\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i = 2\cdot\frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}{2} = \frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2} = \frac{n^2-1}{4} \end{aligned}$$

in definitiva

$$T_{\text{down}}(n) = \begin{cases} \dfrac{n^2}{4} & \text{se } n \text{ è pari,} \\[2ex] \dfrac{n^2-1}{4} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

[2]Naturalmente questo passaggio manca di "rigore formale" (in verità anche quello precedente, sebbene sembri a prima vista ovvio): non è una dimostrazione, né possiamo essere "formalmente certi" che lo schema si ripeta in questo modo all'infinito. Tuttavia è mia convinzione, sulla scia di Lakatos e di altri, che l'attività matematica (quindi la matematica) non si riduca alla dimostrazione e alla formalizzazione, ma contempli anche attività creative non formali come la ricerca di schemi regolari. Anche in questo caso, quindi, stiamo "facendo matematica".

Potremmo compattare l'espressione precedente così

$$T_{\text{down}}(n) = \frac{n^2 - H(n)}{4}$$

qualora trovassimo una funzione $H(n)$ che vale 0 se n è pari e 1 se n è dispari. La funzione che fa al caso nostro è

$$H\colon \mathbb{N} \to \{0, 1\} \qquad H(n) = \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

dunque

$$T_{\text{down}}(n) = \frac{n^2 - \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{4}$$

che assume significato anche (eventualmente) per $n = 0$. La formula ricorsiva (1) diventa allora

$$\begin{aligned} P(n) &= P(n-1) + T_{\text{up}}(n) + T_{\text{down}}(n) \\ &= P(n-1) + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2 - \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{4} \end{aligned}$$

e, dopo un semplice calcolo, la funzione $P(n)$ che fornisce il numero di triangoli a partire da n triangolini dritti alla base risulta essere definita ricorsivamente da

$$P(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ P(n-1) + \dfrac{3n^2 + 2n - \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{4} & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Cerchiamo ora di rendere esplicita (cioè non ricorsiva) l'espressione di $P(n)$, procedendo "a ritroso"

$$\begin{aligned} P(n) &= P(n-1) + \frac{3n^2 + 2n - \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{4} \\ &= P(n-2) + \frac{3(n-1)^2 + 2(n-1) - \sin^2\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)}{4} + \frac{3n^2 + 2n - \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{4} \\ &\vdots \\ &= P(1) + \frac{3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - \sin^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{2}\right)}{4} + \ldots + \frac{3n^2 + 2n - \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{4} \end{aligned}$$

e dopo aver osservato che

$$P(1) = 1 = \frac{3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - \sin^2\left(\frac{1 \cdot \pi}{2}\right)}{4}$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned} P(n) = {} & \frac{3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - \sin^2\left(\frac{1 \cdot \pi}{2}\right)}{4} + \frac{3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - \sin^2\left(\frac{2\pi}{2}\right)}{4} + \ldots \\ & \ldots + \frac{3n^2 + 2n - \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{4} \end{aligned}$$

e associare i termini in questo modo

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{4}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + \frac{2}{4}(1 + 2 + \ldots + n) \\
&- \frac{1}{4}\Bigg[\underbrace{\sin^2\left(\frac{1 \cdot \pi}{2}\right)}_{=1} + \underbrace{\sin^2\left(\frac{2\pi}{2}\right)}_{=0} + \ldots + \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\Bigg].
\end{aligned}
$$

Analizziamo il contenuto delle parentesi. Il primo è la somma dei primi n quadrati

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

il secondo la somma dei primi n interi

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

e il terzo si vede facilmente che vale

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{array}\right\} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Arriviamo allora a scrivere

$$
\begin{aligned}
P(n) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{2}{4} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{4}\left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) - n - \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[n(2n^2 + 5n + 2) - \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{n(n+2)(2n+1) - \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{8}.
\end{aligned}
$$

In conclusione, ecco finalmente la formula che ci dà il numero complessivo $P(n)$ di triangoli contenuti in un triangolo equilatero con n triangolini dritti appartenenti alla base (valida anche per il caso $n = 0$):

$$\boxed{P(n) = \frac{n(n+2)(2n+1) - \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{8}.}$$