La somma dei primi n quadrati

Riccardo Dossena

20 gennaio 2016

La formula che consente di calcolare la somma dei primi n quadrati è la seguente

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Essa si dimostra facilmente per induzione, ma se non la si conosce ancora (o se la si è dimenticata), occorrono ragionamenti che permettano di "scoprirla" (o riscoprirla). Nel seguito proporremo un percorso di questo tipo[1].

1 Alla ricerca della formula

Immaginiamo di non sapere ancora come sommare i quadrati dei primi n numeri naturali. Diamo per scontata, invece, la formula che fornisce la somma dei primi n naturali

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

che è facilmente dimostrabile (sia per induzione che costruttivamente).

Iniziamo osservando che

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \ldots + n \cdot n \\ &= 1 + \underbrace{2+2}_{2 \text{ addendi}} + \underbrace{3+3+3}_{3 \text{ addendi}} + \ldots + \underbrace{n + \ldots + n}_{n \text{ addendi}} \end{aligned}$$

e quindi che tutti gli addendi si possono tabulare così

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n \\ & & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n \\ & & & & 3 & + & \ldots & + & n \\ & & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & & & n \end{array}$$

Poniamo $S = \sum_{i=1}^{n} = i^2$ e completiamo la tabella in questo modo

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & \ldots & + & n \\ 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & \ldots & + & n \\ 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & \ldots & + & n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & n-1 & + & n \end{array}$$

[1] Per una trattazione istruttiva e originale che mette in luce la dimensione della scoperta nel ragionamento induttivo, si veda [2].

notando che la somma T di tutti gli addendi della tabella completa è (trattandosi di n righe di numeri da 1 a n)

$$T = n \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Indicando con I la somma degli addendi della parte inferiore, abbiamo

$$S = T - I.$$

Osserviamo ancora che

$$I = 1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots + (1+2+3+\ldots+n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i} j$$

dunque

$$\begin{aligned} S &= \frac{n^2(n+1)}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (i^2 + i) = \\ &= \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i \right] = \\ &= \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - n^2 + \frac{n(n-1)}{2} \right] = \\ &= \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2} S + \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{4} + \frac{n}{4}. \end{aligned}$$

Considerando solo il primo e l'ultimo membro della precedente catena di uguaglianze, perveniamo all'equazione

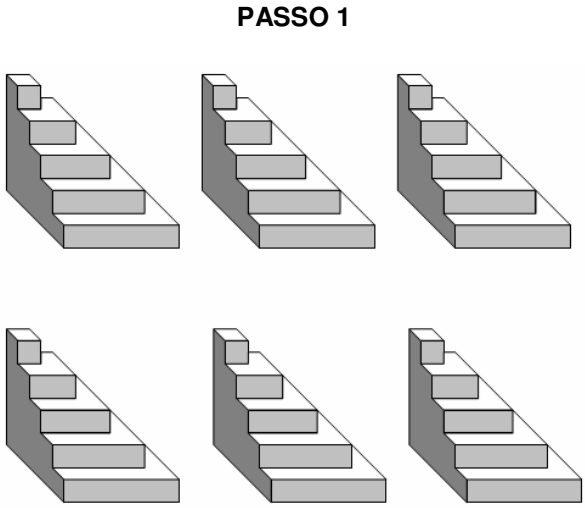
$$S = \frac{n^3}{2} + \frac{3}{4} n^2 - \frac{1}{2} S + \frac{n}{4}$$

che risolta (secondo l'incognita S) fornisce finalmente

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

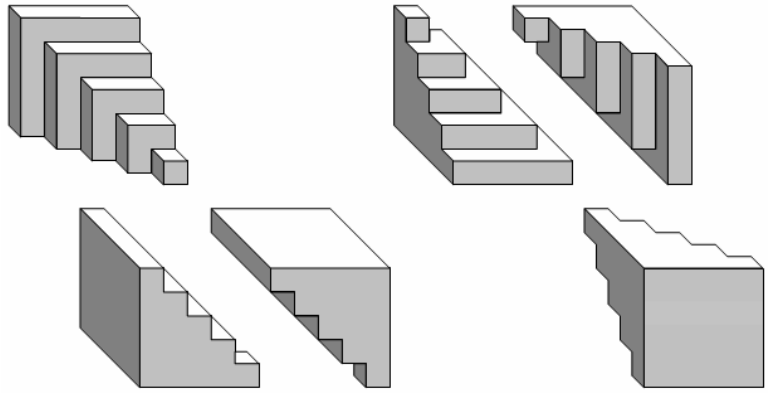
2 Una dimostrazione visiva

La dimostrazione più bella rimane comunque la seguente, tratta dalle meravigliose lezioni del professor Apotema [1, pp. 16 s.][2].

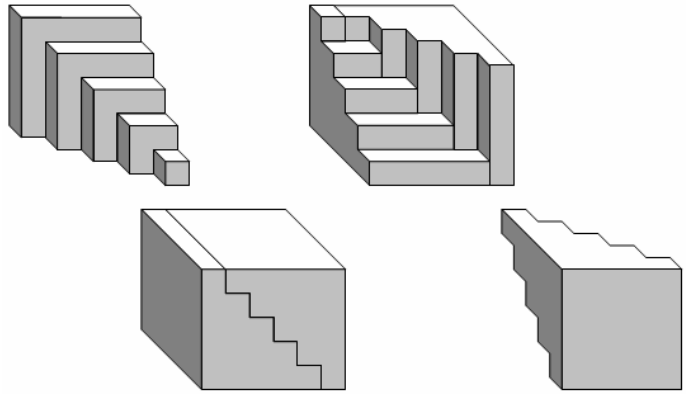


[2] Si veda https://www.academia.edu/1882836/Il_professor_Apotema_insegna..._il_calcolo_delle_somme_e_il_calcolo_integrale_Professor_Apothem_teaches..._sum_and_integral_calculus_

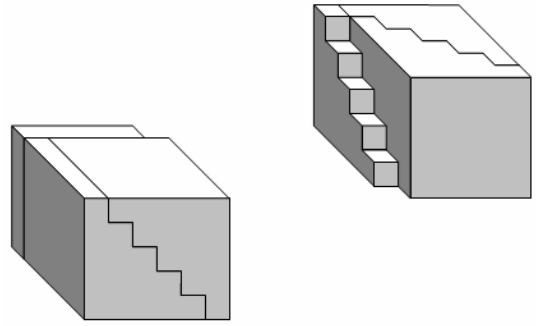
PASSO 2



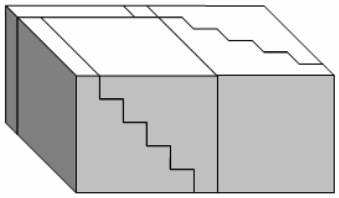
PASSO 3



PASSO 4



PASSO 5



Riferimenti bibliografici

[1] G. Goldoni. *Il professor Apotema insegna… il calcolo delle somme e il calcolo integrale*. Ilmiolibro.it, 2012.

[2] G. Lolli. "Induzione: dimostrazione o scoperta?" In: *Se viceversa. Trenta pezzi facili e meno facili di matematica*. Torino: Bollati Boringhieri, 2014, pp. 22–28.