1 Le regole dell'algebra

In questo paragrafo presenteremo le ordinarie regole di calcolo dell'algebra sotto forma di teoremi.

Teorema 1. *Sia* $(K, +)$ *un gruppo abeliano. Allora, qualunque siano gli elementi di* K*, si ha:*

a) $-(-x) = x$;

b) $-(x + y) = -x - y$;

c) $x = y \quad$ *se e solo se* $\quad x + z = y + z$.

Dimostrazione. Per verificare la a) dobbiamo controllare che x soddisfa le equazioni

$$(-x) + \tilde{x} = \tilde{x} + (-x) = 0$$

dove l'incognita è $\tilde{x}$, cioè che vale $(-x) + x = x + (-x) = 0$. Queste uguaglianze sono vere per definizione di $-x$.

Le dimostrazioni di b) e c) sono lasciate per esercizio. $\square$

2 L'integrazione per parti

Date due funzioni $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ di classe C^1, dove I è un intervallo e a un punto di I, la formula di integrazione per parti è

$$\int_a^x f'(t)g(t)\,dt = f(t)g(t)\Big|_a^x - \int_a^x f(t)g'(t)\,dt \quad \forall x \in I \tag{1}$$

Vediamo ora un esempio di applicazione utile della formula (1):

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_\pi^x \frac{\sin t}{t}\,dt =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{\cos x}{x} - \frac{1}{\pi} - \int_\pi^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt \right) = -\frac{1}{\pi} - \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

Questo esempio mostra la convergenza dell'integrale di partenza (l'ultimo integrale converge assolutamente).